34) 31/10

Συμβολισμοί

$(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ $(a:\mathbb{N}\to E$, $a(\nu)=a_\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$

$\mathbb{N}$ σύνολο των φυσικών αριθμών

$N\subseteq\mathbb{Z}$ απέραντο και φραγμένο

Ορισμός (ισοδύναμος)

$$\rho\text{-}\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l \iff \lim_{\nu\in\mathbb{N}} \rho(a_\nu,l)=0 \iff (\forall\varepsilon>0)(\exists n)(\forall \nu>n):\rho(a_\nu,l)<\varepsilon$$

Πρόταση

$\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l \iff (\forall U(l)): a_\nu\in U(l)$ τελικά για όλα τα $\nu\in\mathbb{N}$.

$a_\nu=\frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$

$(\mathbb{R},|\ |)$ $|\ |\text{-}\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu=0$

$(\mathbb{R},\rho)$ διακρ. μ.χ.

[Έστω $\rho\text{-}\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l\in\mathbb{R}$. Τότε για $\varepsilon=\frac{1}{2}$

ισχύει: $(\exists n)(\forall\nu>n):\rho(a_\nu,l)<\frac{1}{2}\implies$

$(\exists n)(\forall\nu>n):\rho(a_\nu,l)=0$

$\implies(\exists n)(\forall\nu>n):a_\nu=l$], ΑΤΟΠΟ γιατί $a_\nu=\frac{1}{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$)

Παρατήρηση

Στον $(\mathbb{R},\rho)$ διακριτό μετρ. χώρο κάθε συγκλίνουσα ακολουθία είναι σταθερή

(Απόδειξη: Αυτή μέσα στις αγκύλες πιο πάνω)

Ορισμός

$(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \iff \exists$ γνήσια αύξουσα

συνάρτηση $k:M\to N$: $\beta_\mu=a_{k(\mu)}$, $\mu\in M$

(Συνηθίζουμε να την συμβολίζουμε έτσι: $\beta_\mu=a_{k_\mu}$, $\mu\in M$

Πρόταση

Έστω $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα ακολ. σ' ένα μ.χ. E και $(\beta_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθία της $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Τότε $\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu=\lim_{\mu\in M}\beta_\mu$

Απόδειξη

$\lim_{\nu\in\mathbb{N}} a_\nu = l\in E \iff \lim_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(a_\nu,l)=0$. Δηλ. η πραγμ. ακολουθία $(\rho(a_\nu,l))_{\nu\in\mathbb{N}}$ είναι μηδενική. Η $(\rho(\beta_\mu,l))_{\mu\in M}$ είναι υπακολουθία της $(\rho(a_\nu,l))_{\nu\in\mathbb{N}}$. Άρα $\lim_{\mu\in M}\rho(\beta_\mu,l)=\lim_{\nu\in\mathbb{N}}\rho(a_\nu,l)=0$

τελικά $\lim_{\mu\in M}\beta_\mu=l$

Ορισμός

L είναι σημ. συσσώρευσης (σ.σ) της $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \exists (\beta_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθία της $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{\mu\in M}\beta_\mu = L$

Πχ

$\alpha_\nu = \begin{cases} \frac{1}{\nu}, & \nu \text{ άρτιος} \\ 2\nu, & \nu \text{ περιττός} \end{cases}$ Το 0 είναι σ.σ. της $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ αλλά δεν είναι όριο αυτής

Πρόταση

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ακολουθία σ' ένα μ.χ. E κ $L\in E$. Τότε

L σ.σ. της $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \Leftrightarrow \underbrace{(\forall U(L)) : \alpha_\nu \in U(L)}_{(*)}$ για άπειρο πλήθος δεικτών $\nu\in\mathbb{N}$

Απόδειξη

($\Rightarrow$) Έστω L σ.σ. της $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Τότε $\exists (\beta_\mu)_{\mu\in M}$ υπακολουθία της $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ με $\lim\limits_{\mu\in M}\beta_\mu = L$. Έστω, επιπλέον, $U(L)$ τυχούσα

$\xrightarrow[\text{πρόταση}]{\text{προηγ.}} \beta_\mu \in U(L)$ τελικά για όλα τα $\mu\in M \Rightarrow$

$\alpha_{k_\mu} \in U(L)$ τελικά για όλα τα $\mu \in M \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_\nu \in U(L)$ για άπειρα $\nu\in\mathbb{N}$

(Διότι $k : M \to \mathbb{N}$ ↗ και τα στέλνει σε άπειρους όρους του $\mathbb{N}$)

($\Leftarrow$) Έστω ισχύει το $(*)$. Τότε $\alpha_\nu \in B(L, \frac{1}{1})$ για άπειρα $\nu\in\mathbb{N}$.

Έστω $\nu_1 \in \mathbb{N} : \alpha_{\nu_1} \in B(L, \frac{1}{1})$. $\mathbb{N} - \{\nu_1\}$ απέραντο.

$\alpha_\nu \in B(L, \frac{1}{2})$ για άπειρα $\nu\in\mathbb{N}$. Έστω $\nu_2 > \nu_1$ με $\alpha_{\nu_2} \in B(L, \frac{1}{2})$

Ομοίως, $\alpha_\nu \in B(L, \frac{1}{3})$ ——— || ——— $\nu_3 > \nu_2$ με $\alpha_{\nu_3} \in B(L, \frac{1}{3})$

$\left.\begin{array}{l} \overset{M}{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \\ 1 \xrightarrow{k} \nu_1 \\ 2 \to \nu_2 \\ 3 \to \nu_3 \end{array}\right\}$ φτιάχνω την ακολουθία: $(\alpha_{\nu_\mu})_{\mu\in\mathbb{N}}$

$\alpha_{\nu_\mu} \in B(L, \frac{1}{\mu}), \mu\in\mathbb{N} \Rightarrow 0 < \rho(\alpha_{\nu_\mu}, L) < \frac{1}{\mu}, \mu\in\mathbb{N}$ παίρνω όρια (στο $+\infty$) και

έχω ότι $\rho(\alpha_{\nu_\mu}, L) = 0 \Rightarrow \alpha_{\nu_\mu} \to L$

(36)

$\alpha_\nu = \frac{1}{\nu}, \nu \in N$

$(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ εν $(\mathbb{R}, |\,|)$

$(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ εν $((0,1), |\,|) \to$ Δεν συγκλίνει ενώ είναι βασική (*)

Ορισμός (Βασικότητας)

(E, ρ) μ.χ. $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ ακολ. εν E

$(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ βασική $\Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall \mu, \nu \text{ εν } N) \begin{pmatrix} \mu > n \\ \nu > n \end{pmatrix} \Longrightarrow \rho(\alpha_\mu, \alpha_\nu) < \varepsilon \right.$

Συμπεράσματα

Πρόταση 1

Συγκλίνουσα ακολουθία ενός μ.χ. είναι και βασική

(Το αντίστροφο δεν ισχύει από παράδειγμα πιο πάνω (*))

Απόδειξη

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ συγκλίνουσα ακολουθία στον μ.χ. (E, ρ) κ έστω, επιπλέον, $\varepsilon > 0$ (ε τυχών). Τότε $\lim\limits_{\nu \in N} \alpha_\nu = l \Longrightarrow$

$\Longrightarrow (\exists n)(\forall \nu > n) : \rho(\alpha_\nu, l) < \frac{\varepsilon}{2}$. Ας είναι μ, ν εν N με $\mu > n$ κ $\nu > n$

$: \rho(\alpha_\mu, \alpha_\nu) \leq \rho(\alpha_\mu, l) + \rho(\alpha_\nu, l) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$(E_1, \rho_1), (E_2, \rho_2), \ldots, (E_k, \rho_k)$, $E = E_1 \times \ldots \times E_k$

$\left. \begin{matrix} (x_1, \ldots, x_k) = x \in E \\ (y_1, \ldots, y_k) = y \in E \end{matrix} \right\} : \rho(x, y) = \sqrt{\rho_1^2(x_1, y_1) + \cdots + \rho_k^2(x_k, y_k)}$

(E, ρ) καρτεσ. μ.χ. Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu \in N}$ εν E

$\alpha_\nu = (\alpha_{1\nu}, \ldots, \alpha_{k\nu})$

$\rho\text{-}\lim \alpha_\nu = l \in E \Longrightarrow l = (l_1, \ldots, l_k)$

Πρόταση

$$\rho\text{-}\lim \alpha_\nu = l \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_1\text{-}\lim \alpha_{1\nu} = l_1 \\ \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \quad \circ \\ \rho_k\text{-}\lim \alpha_{k\nu} = l_k \end{cases}$$

Απόδειξη πρότασης

(⇒) Ισχύει $\rho_1(\alpha_{1\nu}, l_1) = \sqrt{\rho_1^2(\alpha_{1\nu}, l_1)} \leq \sqrt{\rho_1^2(\alpha_{1\nu}, l_1) + \dots + \rho_k^2(\alpha_{k\nu}, l_k)} = \rho(\alpha_\nu, l)$

$$\underline{0} \leq \rho_k(\alpha_{k\nu}, l_k) \leq \dots \leq \underline{\underline{\rho(\alpha_\nu, l)}} \longrightarrow 0$$

άρα $\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_{1\nu}, L_1) = 0 \\ \vdots \\ \lim\limits_{\nu \in \mathbb{N}} \rho(\alpha_{k\nu}, l_k) = 0 \end{array} \right.$

(⇐) $\underline{0} \leq \rho(\alpha_\nu, l) \leq \left(\overset{\to 0}{\rho(\alpha_{1\nu}, l_1)} + \dots + \overset{\to 0}{\rho(\alpha_{k\nu}, l_k)}\right) \longrightarrow \underline{\underline{0}}$

άρα $\rho(\alpha_\nu, l) \longrightarrow 0$